

Funktionalanalysis 3 / 2026S

Michael Kaltenbäck

Ian Hornik

2. März 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung aus der Funktionalanalysis

1

1 Wiederholung aus der Funktionalanalysis

Definition 1.1. $\mathcal{A}$ heißt Algebra, wenn:

- $\mathcal{A} \neq \{0\}$,
- $\mathcal{A}$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und
- $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine assoziative, bilineare Abbildung ist.

Beispiel 1.2. Beispiele von Algebren:

- $\ell^\infty(\mu, \mathbb{C})$

Definition 1.3. Falls eine Algebra $\mathcal{A}$ eine Norm trägt, welche $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$ erfüllt, so sprechen wir von einer normierten Algebra.

Ist eine normierte Algebra vollständig als Banachraum, so sprechen wir von einer Banachalgebra.

Beispiel 1.4. Sei X ein Banachraum und bezeichne $L_b(X)$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen, dann ist dies eine Banachalgebra (mit der Operatornorm).

Definition 1.5. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, und $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ involutorisch, konjugiert linear mit $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$, dann heißt $\mathcal{A}$ auch $*$ -Algebra.

Beispiel 1.6. Der Raum der komplexen Polynome $\mathbb{C}[z]$ mit der Konjugation als $*$ -Operation ist eine $*$ -Algebra.

Definition 1.7. Falls $\mathcal{A}$ normierte Algebra und eine $*$ -Algebra ist und $*$ isometrisch ist, dann heißt $\mathcal{A}$ normierte $*$ -Algebra oder auch Banach- $*$ -Algebra.

Definition 1.8. Eine C^* -Algebra ist eine B^* -Algebra mit $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Lemma 1.9. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ konjugiert linear und involutorisch und für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gelte $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$. Falls für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt $\|a\|^2 \leq \|aa^*\|$, dann ist $\mathcal{A}$ sogar eine C^* -Algebra.

Beweis. Sei $a \neq 0$ beliebig, dann gilt

$$\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \leq \|a\| \|a^*\|.$$

Insbesondere folgt

$$\|a\| \leq \|a^*\|$$

für alle $a \in \mathcal{A}$. Aus Symmetriegründen folgt sogar Gleichheit. Weiters folgt

$$\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \leq \|a\| \|a^*\| = \|a\|^2.$$

□

Bemerkung 1.10. Eigenschaft von normierten Algebren: Die Multiplikation ist als Abbildung von $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ stetig, wobei entsprechend die Produkttopologie verwendet wird.

Definition 1.11. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra.

- $e \in \mathcal{A}$ heißt Einselement¹, falls $a \cdot e = a = e \cdot a$.
- Hat eine Algebra ein Einselement, so definieren wir

$$\text{Inv}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists b \in \mathcal{A} : a \cdot b = e = b \cdot a\}.$$

- Hat eine Algebra ein Einselement und ist $a \in \mathcal{A}$, so heißt

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (a - \lambda e) \in \text{Inv}(\mathcal{A})\}$$

die *Resolvente* von a . Entsprechend definieren wir durch $\sigma_{\mathcal{A}}(a) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathcal{A}}(a)$ das *Spektrum* von a .

- Hat eine Algebra ein Einselement und ist $a \in \mathcal{A}$, so heißt $r_{\mathcal{A}}(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$ der *Spektralradius* von a . Ist das Spektrum leer, so setzen wir das Supremum nach Konvention gleich 0.

Beispiel 1.12. Für einen Hilbertraum H betrachte $\mathcal{A} = L_b(H)$. Das Adjungieren eines Operators ist unsere $*$ -Operation. Dann ist $\mathcal{A}$ sogar eine C^* -Algebra.

Sei $P \in L_b(H)$ eine nicht-triviale orthogonale Projektion. Dann ist $\sigma(P) = \{0, 1\}$, da $P^2 - P = 0$, womit nach dem Spektralabbildungssatz $\sigma(P^2 - P) = \{0\}$ folgt, und damit die Behauptung.

¹Wie man in der Algebra oft zeigt bedingt die Existenz von Einselement bereits die Eindeutigkeit.

Beispiel 1.13. Ist $a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, so gilt

$$\sigma(a^{-1}) = \{1/z \mid z \in \sigma(a)\}.$$

Definition 1.14. Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra und $e \in \mathcal{A}$ ein Einselement. e heißt normiert wenn $\|e\| = 1$, in dem Fall nennen wir e auch *Eins* und reden von einer Algebra mit Eins.

Bemerkung 1.15. In jedem Fall gilt für Einselemente stets $1 \leq \|e\|$.

Beispiel 1.16. Einselemente müssen nicht Norm 1 haben (man skaliere die Norm einfach mit Faktor $\neq 1$).

Bemerkung 1.17. Eigenschaften von Banachalgebren mit Eins:

- $\text{Inv}(\mathcal{A})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{A}$.
- Für $a \in \mathcal{A}$ ist $\rho(a)$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ offen.
- Für $a \in \mathcal{A}$ ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen. Weiters gilt sogar stets $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}^{\mathbb{C}}(0)$, womit das Spektrum stets kompakt ist. Weiters ist das Spektrum stets nichtleer.
- Es gilt

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a^n\|)^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\|a^n\|)^{1/n}.$$

- Ist $\mathcal{A}$ sogar eine C^* -Algebra mit Eins, $x \in \mathcal{A}$ und gilt $xx^* = x^*x$, dann gilt sogar $r(x) = \|x\|$.

Beispiel 1.18. Betrachte $L_b(\mathbb{C}^2)$, wobei $\mathbb{C}^2$ als Hilbertraum aufzufassen ist.

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(J) = \{0\} \implies r(J) = 0 \neq 1 = \|J\|.$$

Bemerkung 1.19.

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren mit Einselement und $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus mit $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$. Dann folgt $\varphi(\text{Inv}(\mathcal{A})) \subseteq \text{Inv}(\mathcal{B})$. Für $a \in \mathcal{A}$ folgt $\rho_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \rho_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$, sowie $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \supseteq \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$.
2. Sei $\mathcal{A}$ Algebra mit Einselement, $\mathcal{B}$ eine Algebra und $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann hat auch $\mathcal{B}$ ein Einselement.
3. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^* -Algebren mit Einselement und $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein $*$ -Homomorphismus mit $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$. Dann behaupten wir $\|\varphi\| = 1$. Für $a \in \mathcal{A}$ gilt

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*)\varphi(a)\| = r(\varphi(a^*a)) = \sup_{\lambda \in \sigma(\varphi(a^*a))} |\lambda| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(a^*a)} |\lambda| = r(a^*a) = \|a\|^2.$$

4. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement e . Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter algebra mit $e \in \mathcal{B}$. Dann folgt $\text{Inv}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ und $\rho_{\mathcal{B}}(b) \subseteq \rho_{\mathcal{A}}(b)$ für alle $b \in \mathcal{B}$.

5. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e . Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unteralgebra mit $e \in \mathcal{B}$. Zunächst ist $\text{Inv}(\mathcal{B})$ offen als Teilmenge von $\text{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$, nach Definition der Spurtopologie. Sei nun $b \in \text{cl}_{\text{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}}(\text{Inv}(\mathcal{B})) = \text{cl}_{\mathcal{A}}(\text{Inv}(\mathcal{B})) \cap \text{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Dann existiert $b^{-1} \in \mathcal{A}$. Gleichzeitig gilt $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, wobei $b_n \in \text{Inv}(\mathcal{B}) \subseteq \text{Inv}(\mathcal{A})$, womit sogar $b_n^{-1} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Da $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist folgt sogar $b^{-1} \in \mathcal{B}$, und damit sogar $b \in \text{Inv}(\mathcal{B})$. Also ist $\text{Inv}(\mathcal{B})$ abgeschlossen als Teilmenge von $\text{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$.